1. Tests estadísticos

Ejercicio 1

Cuando una partícula cargada atraviesa un gas produce ionización. El valor medio de la cantidad de energía depositada por ionización en el gas depende del tipo de partícula (depende de la velocidad de la partícula y por lo tanto si el momento del haz está fijado, de la masa de ésta).Específicamente, la pdf para la pérdida de energia Δ de una partícula de velocidad β que atraviesa un material, sigue una distribución de Landau.

$$f(\Delta;\beta) = \frac{1}{\xi}\phi(\lambda), \quad 0 \leq \Delta \leq \infty$$

Donde ξ es un parámetro relacionado con las propiedades del material y la velocidad de la partícula, y $\phi(\lambda)$ es la pdf de la variable adimensional λ, que a su vez está relacionada con las propiedades del material, la velocidad y la pérdida de energía:

$$\begin{aligned}
&f(\Delta;\beta) = \tfrac{1}{\xi}\phi(\lambda), \quad 0 \leq \Delta \leq \infty \\
&\xi = \tfrac{2\pi N_A e^4 z^2 \rho \sum Z}{m_e c^2 \sum A} \tfrac{d}{\beta^2} \\
&\lambda = \tfrac{1}{\xi}\left[\Delta - \xi\left(\log \tfrac{\xi}{\varepsilon'} + 1 - \gamma_E\right)\right] \\
&\varepsilon' = \tfrac{I^2 \exp(\beta^2)}{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}
\end{aligned}$$

Donde N_A es el número de Avogadro, m_e y e la masa y carga del electrón, z la carga de la partícula incidente en unidades de la carga del electrón, $\sum Z$ y $\sum A$ las sumas de los números atómicos y los pesos atómicos del material, ρ su densidad, d el espesor de la capa de material atravesado, $I = I_0 Z$, donde I_0 es la ionización característica del material, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ y $\gamma_E = 0{,}5772...$ es la constante de Euler.La función λ viene dada por:

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(-u\log u - \lambda u)\sin \pi u du$$

Debido a la larga cola que la distribución exhibe, no es posible calcular la media ni ningún momento de orden superior (las integrales divergen). Sin embargo el valor más probable de la distribución es sensible a la velocidad de la partícula.

Se os pide:

- Representar gráficamente la pdf $f(\Delta;\beta)$ para partículas cargadas (carga del electrón) que atraviesan una capa de 4 mm de Argón, con $\beta = 0{,}4, 0{,}6, 0{,}95, 9{,}999$.
- Calcular el valor más probable para cada β y representar este valor contra la cantidad $\beta\gamma$.

Ejercicio 2

Suponer que disponemos de un test estadístico t basad en la medida de la ionización del problema anterior. Suponer que el test sigue una pdf gausiana centrada en 0 para electrones y centrada en 2 para piones, con desviación estándar unidad para ambas distribuciones. Para seleccionar electrones requerimos $t < 1$. Se os pide:

- ¿Cual es la eficiencia para seleccionar electrones?

- ¿Cual es la probabilidad de aceptar un pion como un electrón?
- Suponer que la muestra contiene un 99 % de piones y un 1 % de electrones. ¿Cuál será la pureza de la muestra de electrones seleccionada?

Ejercicio 3

El número de sucesos producidos en colisiones pp en el LHC, con unas ciertas propieadades cinemáticas, puede tratarse como una variable distribuida Poisson. Suponer que para una cierta luminosidad esperamos 3.9 sucesos y observamos 16. Calcular la verosimilitud (valor-P) de que no haya nueva física en este tipo de procesos.

Propina: Para sumar probabilidades de Poisson podéis usar:

$$\sum_{n=0}^{m} P(n;\nu) = 1 - F_{\chi^2}(2\nu; n_{dof})$$

Donde $P(n;\nu)$ es la probabilidad de Poisson para n dado un valor medio ν y F_{χ^2} es la distribución acumulativa del χ^2 para $n_{dof} = 2(m+1)$. F_{χ^2} se corresponde a gsl_cdf_chisq_P y $1 - F_{\chi^2}$ a gsl_cdf_chisq_Q.

Ejercicio 4

En un experimento histórico, Geiger y Rutherford contaron el número de desintegraciones α que ocurrian en intervalos de tiempo fijos. Los datos se muestran en la tabla. Se os pide:

- ¿qué distribución sigue el número de desintegraciones observado en m observado en Δt fijo?
- Calcular la media muestral (aritmética) de m

$$\bar{m} = \frac{1}{n_{tot}} \sum_m n_m m$$

- Calcular la varianza muestral

$$s^2 = \frac{1}{n_{tot} - 1} \sum_m n_m (n - \bar{m})^2$$

  donde n_m es el número de ocurrencias de m desintegraciones y $n_t ot = \sum n_m = 2608$ es la suma total de intervalos temporales. La suma se extiende desde $m = 0$ hasta $m = 14$ en la tabla.

- Encontrar el índice de dispersión $t = s^2/\bar{m}$
- Qué valor esperamos para t

Puede demostrarse que si m está distribuida Poisson y n_{tot} es grande entonces $(n_{tot} - 1)t$ sigue una distribución χ^2 con $(n_{tot} - 1)t$ grados de libertad. para n_{tot} grande la distribución es gausiana, con media $(n_{tot} - 1)$ y varianza $2(n_{tot} - 1)$. Usar esta aproximación para verificar la hipótesis de que m sigue una distribución de Poisson.