1. Distribuciones estadísticas

Ejercicio 1

Suponer que la variable aleatoria x está distribuida uniformemente en el intervalo $[\alpha, \beta]$, con $\alpha, \beta > 0$. Encontrar el valor esperado de $1/x$ y comparar la respuesta con $1/E[x]$ usando $\alpha = 1, \beta = 2$.

Ejercicio 2

Suponer que la pdf conjunta para las variables aleatorias independientes x e y, viene dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Demostrar que la pdf $g(z)$, para $z = xy$ es:

$$g(z) = \begin{cases} -\log z & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Demostrar que la distribución acumulativa de z es:

$$G(z) = z(1 - lnz).$$

Ejercicio 3

Considerar la pdf exponencial:

$$f(x; \xi) = \frac{1}{\xi} e^{-x/\xi}, \ x \geq 0$$

- Demostrar que la distribución acumulativa es:

$$F(x) = 1 - e^{-x/\xi}, \ x \geq 0$$

- Demostrar que la probabilidad condicional de encontrar un valor $x < x_0 + x'$, dado que $x > x_0$ es igual a la probabilidad (incondicional) de encontar que x es menor que x' es decir:

$$P(x \leq x_0 + x' | x \geq x_0) = P(x \leq x')$$

- Muones cósmicos producidos en las capas altas de la atmósfera entran en un detector situado al nivel del mar, donde algunos de ellos se detienen y se desintegran. La diferencia de tiempo t entre el instante de entrar en el detector y el instante de desintegración, sigue una distribución exponencial y el valor medio de t es la vida media del muon, aproximadamente 2.2 μs. Explicar por qué el tiempo de vida del muon anterior al instante en que éste entra en el detector es irrelevante a la hora de calcular la vida media.

2. Método de Monte Carlo

Ejercicio 1

- Implementar vuestro propio generador de números aleatorios, usando el algoritmo descrito en las notas del curso.
- Rellenar un histograma de 100 bines con 10000 números generados por vuestro algoritmo. Haced que sean uniformemente distribuidos entre 0 y 1. ¿Cuán aleatorios son vuestros números aleatorios?
- Probar con un algoritmo como RANLUX (GSL). Comparar.

Ejercicio 2

Considerar las variables aleatorias r_i distribuidas uniformemente entre 0 y 1. Escribir un programa que os permita hacer histogramas de las siguientes variables:

$$
\begin{aligned}
x &= r_1 + r_2 - 1 \\
x &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 - 2 \\
x &= \sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \\
x &= \sum_{i=1}^{100} r_i - 10
\end{aligned}
$$

Calcular exactamente las medias y las varianzas de las variables definidas anteriormente y compararlas con los valores obtenidos a partir de los histogramas. Comentar la conexión entre vuestros resultados y el teorema del límite central.

Ejercicio 3

Considerar una pdf del tipo "diente de sierra"

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x_{\text{máx}}^2} & 0 < x < x_{\text{máx}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

Usar el método de transformación para encontrar la función $x(r)$ que nos permita generar números aleatorios de acuerdo con $f(x)$. Implementar el método en un programa y hacer un histograma de los resultados (Usar $x_{xmax} = 1$).

Escribir un programa para generar números aleatorios que sigan la pdf $f(x)$ utilizando la técnica de aceptar/rechazar. Realizar un histograma de los resultados.