Ejercicios, Lección 1

Los ejercicios del 1 al 4 son aplicaciones inmediatas de los conceptos que se han expuesto en la clase de teoría, pueden hacerse en clase fácilmente.
El ejercicio 5 tiene algo más de interés y un poco de gimnasia. Deberes para casa
Se resuelve (voluntario o dedo ejecutor) en clase mañana.

Ejercicio 1

Demostrar que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(pista: expresar A∪B como la unión de tres conjuntos disjuntos)

Ejercicio 2

Medidas estadísticas aseguran que la fracción de la población enferma de SIDA es del 0.1 %. Por otra parte, sabemos que la prueba para establecer si un paciente tiene SIDA es eficiente al 98%, es decir, la probabilidad de que el resultado sea positivo cuando un paciente está infectado es del 98%. Por otra parte, la prueba tiene un 3 % de ineficiencia, es decir la probabilidad de que el resultado sea positivo cuando el paciente no está infectado es del 3%.

Bajo estas hipótesis, suponer que habéis resultado positivos en la prueba del SIDA: ¿Tenéis razones para estar muy preocupados?

Ejercicio 3

Un haz de partículas consiste en una fracción de 10^{-4} electrones y el resto fotones. Las partículas pasan a través de un detector de dos capas que puede responder:

a) dando señal en ambas capas
b) dando señal en una de las dos
c) o no dando señal en ninguna

La probabilidad de cada una de estas respuestas para los dos tipos de partículas es

$$P(0 \mid e) = 0.001 \quad P(0 \mid \gamma) = 0.99899$$
$$P(1 \mid e) = 0.01 \quad P(1 \mid \gamma) = 0.001$$
$$P(2 \mid e) = 0.01 \quad P(2 \mid \gamma) = 10^{-5}$$

¿Cuál es la probabilidad de que una partícula detectada en una capa sólo sea un fotón?
¿Cuál es la probabilidad de que una partícula detectada en ambas capas sea un electrón?

Ejercicio 4

Considerar una variable aleatoria x y constantes 2 y β. Demostrar que:

$$E[\alpha x+\beta]=\alpha E[x]+\beta$$

$$V[\alpha x+\beta]=\alpha^2 V[x]$$

Ejercicio 5

(sabroso)

Suponer el conjunto $x = (x_1, x_2)$, donde x_1 y x_2 tienen un coeficiente de correlación ρ.

1) Demostrar que su matriz de covarianza puede expresarse como:

$$V=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

2) Encontrar una nueva variable y = (y_1,y_2) tales que las matriz de covarianza de las *y*, *U*, sea diagonal (es decir, realizar una transformación 2al que las nuevas variables y_1, y_2 no estén correlacionadas)

Pista:
Probar una transformación lineal, y = Ax, propagar errores para calcular U, diagonalizar